Profesor:
Ricardo Espino L.

PITAGORAS ACADEMIA

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

FUNCIONES ESPECIALES

FUNCIÓN INYECTIVA

$Sean\ X, Y\ subconjuntos\ de\ \mathbb{R}\ y\ f\ una\ función\ definida\ de\ X\ a\ Y,$
$con\ regla\ de\ correspondencia\ y = f(x)\ es\ decir:$

$$\boxed{f\colon X \to Y.\quad y = f(x)}$$

$Se\ dirá\ que\ f\ es\ una\ función\ inyectiva\ si\ y\ solo\ si\ satisface\ la\ siguiente\ condición:$

$$\forall a, b, \in X\ \wedge f(a) = f(b) \to a = b$$

$Esto\ también\ puede\ interpretarse\ de\ manera\ equivalente:$

$$\forall a, b, \in X\ \wedge a \neq b \to f(a) \neq f(b)$$

$No\ todas\ las\ funciones\ cumplen\ esta\ condición, por\ ejemplo$

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y = f(x) = x^2$$

$no\ cumple\ la\ condición\ de\ inyectividad, ya\ que$ $\boldsymbol{si\ bien\ f(7) = f(-7), no\ cumple\ evidentemente\ que\ 7 = -7}$
$inclusive\ podemos\ observar\ que\ para\ esta\ función\ si\ f(a) = f(b)$

$$no\ implica\ neesariamente\ que\ a = b\ sino\ también\ podría\ darse\ a = -b$$

Analicemos la inyectividad en otros ejemplos:

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y = f(x) = x^2 - 3x$

Para demostrar la inyectividad debemos demostrar que
$\boldsymbol{\forall a, b \in \mathbb{R}\ f(a) = f(b)}$ ***implica necesariamente que*** $\boldsymbol{a = b}$

$f(a) = f(b) \quad \to a^2 - 3a = b^2 - 3b$

$\to a^2 - b^2 - 3a + 3b = 0 \quad \to (a-b)(a+b) - 3(a-b) = 0$

$\to (a-b)(a+b-3) = 0$

$\to a - b = 0 \ \vee \ \ a + b - 3 = 0$

$\to a = b \vee a + b = 3$

Por lo tanto f no es inyectiva

$g\colon [2; +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad y = g(x) = x^2 + x + 1$

Para demostrar la inyectividad debemos demostrar que
$\boldsymbol{\forall a, b \in [2; +\infty[\ \ g(a) = g(b)}$ ***implica necesariamente que*** $\boldsymbol{a = b}$

$g(a) = g(b) \quad \to a^2 + a + 1 = b^2 + b + 1$

$\to a^2 - b^2 + a - b = 0 \quad \to (a-b)(a+b) + (a-b) = 0$

$\to (a-b)(a+b+1) = 0 \quad \to a - b = 0 \ \vee \ \ a + b + 1 = 0$

$\to a = b \vee a + b = -1$

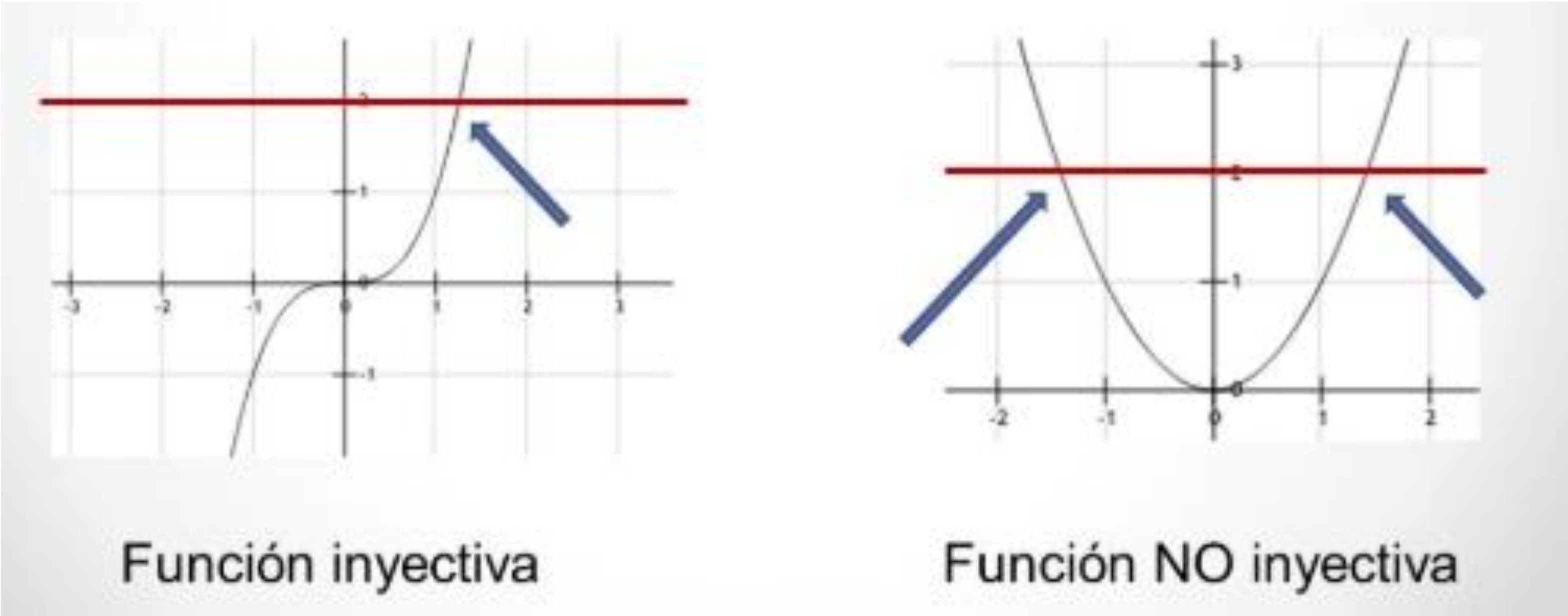
pero ya que $a, b \in [2; +\infty[$ *es imposible que* $a + b = -1$
por lo tanto solo puede ocurrir que $a = b$

Por lo tanto g es inyectiva

Las funciones inyectivas también son denominadas ***UNIVALENTES*** *o funciones* ***DE UNO A UNO***

Gráficamente podemos tener ***LA PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL***

La gráfica de una función inyectiva solo puede tener un punto de intersección con una recta horizontal



FUNCIÓN SURYECTIVA

$Sean\ X, Y\ subconjuntos\ de\ \mathbb{R}\ y\ f\ una\ función\ definida\ de\ X\ a\ Y,$
$con\ regla\ de\ correspondencia\ y = f(x)\ es\ decir:$

$$f: X \to Y. \quad y = f(x)$$

$Se\ dirá\ que\ f\ es\ una\ función\ \ suryectiva\ si\ y\ solo\ si\ satisface\ la\ siguiente\ condición:$

$$\forall\, y\ \in Y\ \exists\, x \in X:\ \ y = f(x)$$

$lo\ cual\ es\ equivalente\ a\ decir\ que:$

$$Ranf\ = Y$$

$Por\ ejemplo\ sea\ la\ función:\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad y = f(x) = x^2 + 3$

$Esta\ función\ no\ satisface\ que\ \ \forall\, y\ \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in \mathbb{R}:\ \ y = x^2 + 3$

$ya\ que\ por\ ejemplo\ para\ valores\ de\ y = 2\ o\ y = -1, no\ existe\ tal\ x.$

$Pero\ por\ otro\ lado\ sea\ la\ función: g: \mathbb{R} \to [4; +\infty[\,, \qquad y = g(x) = x^2 + 4$

$Esta\ función\ sí\ satisface\ que\ \ \forall\, y\ \in [4; +\infty[\ \exists\, x \in \mathbb{R}:\ \ y = x^2 + 4$

$ya\ que\ para\ cualquier\ y \in [4; +\infty[\ podemos\ encontrar\ x = \sqrt{y-4}\ o\ x = -\sqrt{y-4}$

$que\ satisfará\ que\ x^2 + 4 = y\ \ \ y\ por\ lo\ tanto\ \boldsymbol{g\ es\ suryectiva}$

$De\ ahora\ en\ adelante\ bastará\ con\ verificar\ que\ \boldsymbol{Ranf} = \boldsymbol{Y}\ para\ analizar\ la\ suryectividad$

$Ejemplo: analizar\ la\ suryectividad\ de:\quad f:[-1;+\infty[\rightarrow [2;+\infty[\quad y=f(x)=x^2+6x+7$

$debemos\ comprobar\ que\ \ Ranf = [2;+\infty[$

$ya\ que\ x\in[-1;+\infty[\quad esto\ significa\ que\ x\geq -1\qquad \rightarrow x+3\geq 2$

$\rightarrow x^2+6x+9\geq 4$

$\rightarrow x^2+6x+7\geq 2$

$por\ lo\ tanto\ Ranf = [2;+\infty[\qquad f:[-1;+\infty[\rightarrow [2;+\infty[\quad y=f(x)=x^2+6x+7\ es\ suryectiva$

$Las\ funciones\ que\ son\ suryectivas\ también\ son\ conocidas\ como:$
$Sobreyectivas, suprayectivas, subyectivas, epiyectivas, exhaustivas$

FUNCIÓN BIYECTIVA

$Sean\ X, Y\ subconjuntos\ de\ \mathbb{R}\ y\ f\ una\ función\ definida\ de\ X\ a\ Y,$
$con\ regla\ de\ correspondencia\ y = f(x)\ es\ decir:$

$\boxed{f: X \to Y. \quad y = f(x)}$

$Se\ dice\ que\ f\ es\ \boldsymbol{biyectiva}\ si\ y\ solo\ si\ es\ \boldsymbol{inyectiva\ y\ suryectiva}\ simultáneamente.$

$es\ decir\ f(a) = f(b) implica\ que\ a = b\ y\ además\ \forall\ y\ \in Y\ \exists\ x \in X\ tal\ que\ y = f(x)$

$es\ decir\ \forall\ \boldsymbol{y}\ \in \boldsymbol{Y}\ \exists!\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\ \boldsymbol{tal\ que\ y = f(x)}$

$Ejemplo$

$g: [1; +\infty[\to [5; +\infty[, \qquad y = g(x) = x^2 + 4$

$g(a) = g(b) \to a^2 + 4 = b^2 + 4$

$\to a^2 = b^2\ y\ ya\ que\ a, b \geq 1\ entonces\ a = b$ $\qquad \boxed{\to g\ es\ inyectiva}$

$\therefore g\ es\ biyectiva$

$Además\ ya\ que\ x \geq 1\ entonces\ x^2 + 4 \geq 5$ $\qquad \boxed{\to g\ es\ suryectiva}$

$\to Rang = [5; +\infty[$

FUNCIÓN INVERSA

Sean X, Y *subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *y* f *una* **función biyectiva** *definida de* X *a* Y, *con regla de correspondencia* $y = f(x)$ *es decir*:

$$\boxed{f: X \to Y. \quad y = f(x)}$$

entonces **existe una función** $\boldsymbol{f^{-1}: Y \to X, y = f^{-1}(x)}$

tal que cumple que $y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

A esta función se le conoce como la **función inversa de** $\boldsymbol{f}$, *y se denota como* $\boldsymbol{f^{-1}}$ **o** $\boldsymbol{f^{*}}$

Ejemplo: *Sea la función biyectiva* $f: [1; 3[\to [3; 7[\quad y = f(x) = 2x + 1$

entonces podemos definir a una función $f^{-1}: [3; 7[\to [1; 3[\quad y = f^{-1}(x)$

tal que cumple que $y = f(x) = 2x + 1 \leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$

$$\boxed{f^{-1}: [3; 7[\to [1; 3[\; y = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}}$$

PITAGORAS ACADEMIA

PREGUNTA 15

El Teorema Fundamental de la Aritmética establece que todo número natural mayor o igual a dos se puede expresar de forma única

$$P_1^{n_1}P_2^{n_2}\ldots P_k^{n_k}$$

donde $P_1, P_2, \ldots, P_k$ son sus factores primos y $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son enteros mayores o iguales a uno.

Se define la función

$$f: \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \to \mathbb{N}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 1 \\ n_1 + \ldots + n_k & , \quad x = P_1^{n_1}\ldots P_k^{n_k} \end{cases}$$

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

I. f es sobreyectiva.

II. La ecuación $f(n) = 1$ tiene infinitas soluciones.

III. f es creciente.

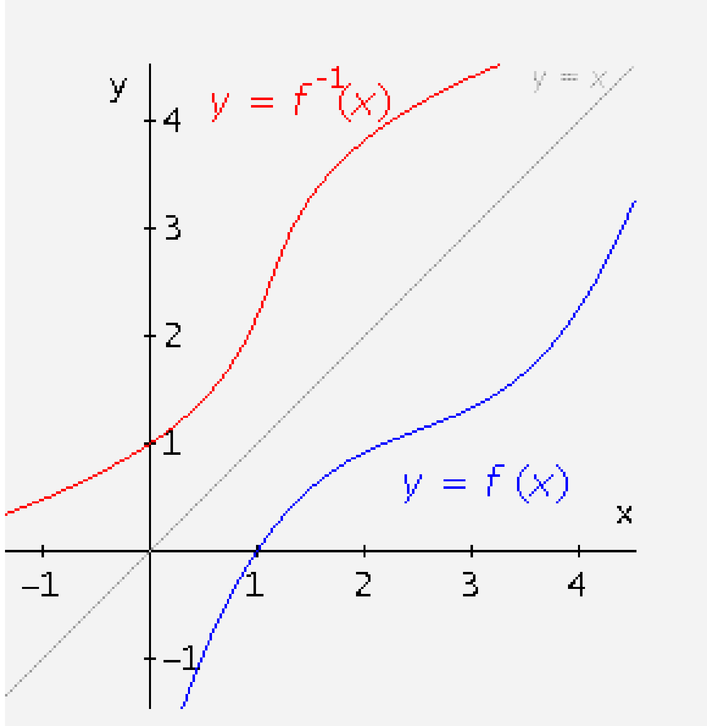
A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

Propiedades:

$$\boxed{Dom f = Ran f^{-1}} \qquad \boxed{f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in Dom f}$$

$$\boxed{Ran f = Dom f^{-1}} \qquad \boxed{f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in Dom f^{-1}}$$

Gráficamente f *y* f^{-1} *presentan gráficas simétricas con respecto a la función identidad* $f(x) = x$



$De\ manera\ práctica, para\ hallar\ la\ regla\ de\ correspondencia\ de\ una\ función\ inversa$

$\boldsymbol{se\ intercambiarán\ las\ variables\ x\ e\ y\ y\ se\ despeja\ la\ variable\ y, ejemplo}:$

$\boldsymbol{Ejemplo}: \boldsymbol{Problema\ \#6}$

06. Se tiene la función real :

$F(x) = (x - 2)(4 - x);\ x < 3$

Determine F^{-1}, si existe

A) $F^{-1} = \{(x;\ 3 - \sqrt{1-x}) \ /\ x < 1\}$

B) $F^{-1} = \{(x;\ 4 - \sqrt{2-x}) \ /\ x < 2\}$

C) $F^{-1} = \{(x;\ 2 - \sqrt{1-x}) \ /\ x < 1\}$

D) $F^{-1} = \{(x;\ 4 - \sqrt{3-x}) \ /\ x < 3\}$

E) No admite inversa

$\boxed{Primero\ debemos\ comprobar\ la\ biyectividad\ de\ F(x)}$

$$\boxed{y = F(x) = (x-2)(4-x) = -x^2 + 6x - 8 \quad con\ x < 3}$$

$$F(a) = F(b) \rightarrow -a^2 + 6a - 8 = -b^2 + 6b - 8$$

$$\rightarrow 0 = a^2 - b^2 - 6a + 6b$$

$$\rightarrow 0 = (a-b)(a+b-6) \quad \rightarrow a = b \quad \vee \quad a + b = 6$$

$pero\ ya\ que\ a, b < 3 \quad entonces\ a + b < 6\ y\ solo\ podría\ ser\ a = b$

$F\ es\ inyectiva$

$Si\ bien\ en\ \ este\ problema\ no\ se\ ha\ definido\ a\ F(x) de\ la\ forma\ F: X \rightarrow Y$

$Podemos\ considerar\ que\ F\ está\ definida\ de\ ]-\infty; 3[\rightarrow Ranf \quad para\ que\ así\ sea\ suryectiva$

$faltaría\ calcular\ el\ Ranf\ el\ cual\ resulta\ ser:\ ]-\infty; 1[$

con lo cual tenemos a la función :

$$F:]-\infty;3[\to]-\infty;1] \quad y = F(x) = -x^2 + 6x - 8$$

la cual ya comprobamos que es inyectiva y suryectiva, es decir ***biyectiva***

y por lo tanto podemos definir a la función inversa:

$$\boxed{F^{-1}:]-\infty;1] \to]-\infty;3],} \quad \boxed{y = F^{-1}(x)}$$

cuya ***regla de correspondencia*** *la calcularemos de la siguiente forma*:

$y = -x^2 + 6x - 8$ <u>*intercambiamos x e y*</u> $\to x = -y^2 + 6y - 8$

<u>*despejamos y*:</u> $x - 1 = -(y-3)^2$ $\to 1 - x = (y-3)^2$

$\to y = 3 \pm \sqrt{1-x}$

pero ***ya que el rango de*** $\boldsymbol{F^{-1}}$ ***debe ser*** $]-\infty;\mathbf{3}]$ *entonces* $\boxed{\to y = 3 - \sqrt{1-x}}$

$F:]-\infty;1] :]-\infty;3] \to y = F^{-1}(x) = 3 - \sqrt{1-x}$ *o también* $F^{-1} = \{(x;3-\sqrt{1-x}), x < 1\}$

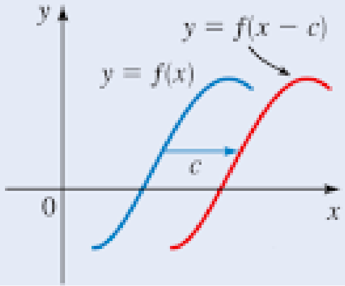
TRAZADO DE GRÁFICAS

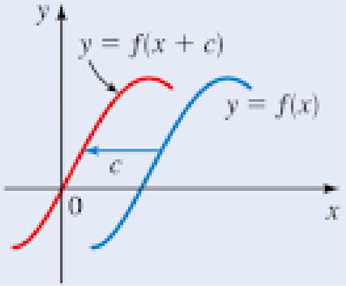
Desplazamientos horizontales

Supóngase que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha c unidades.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la izquierda c unidades.



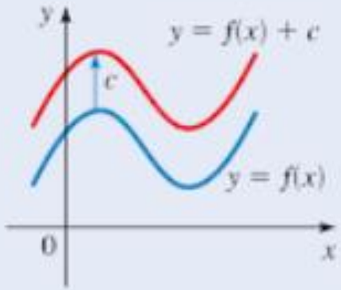


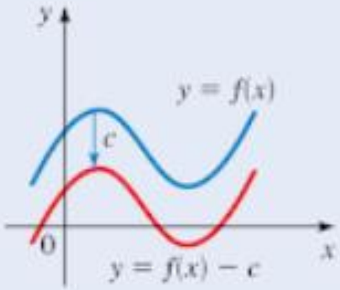
Desplazamientos verticales

Suponga que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.



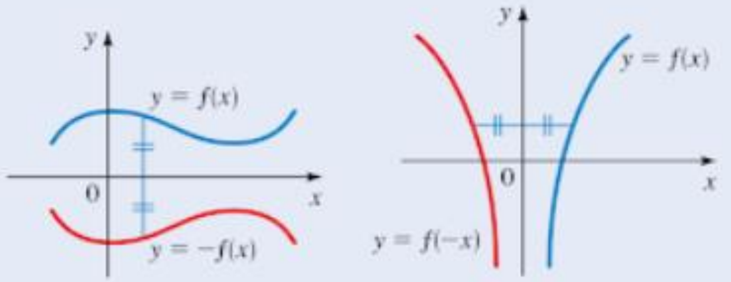


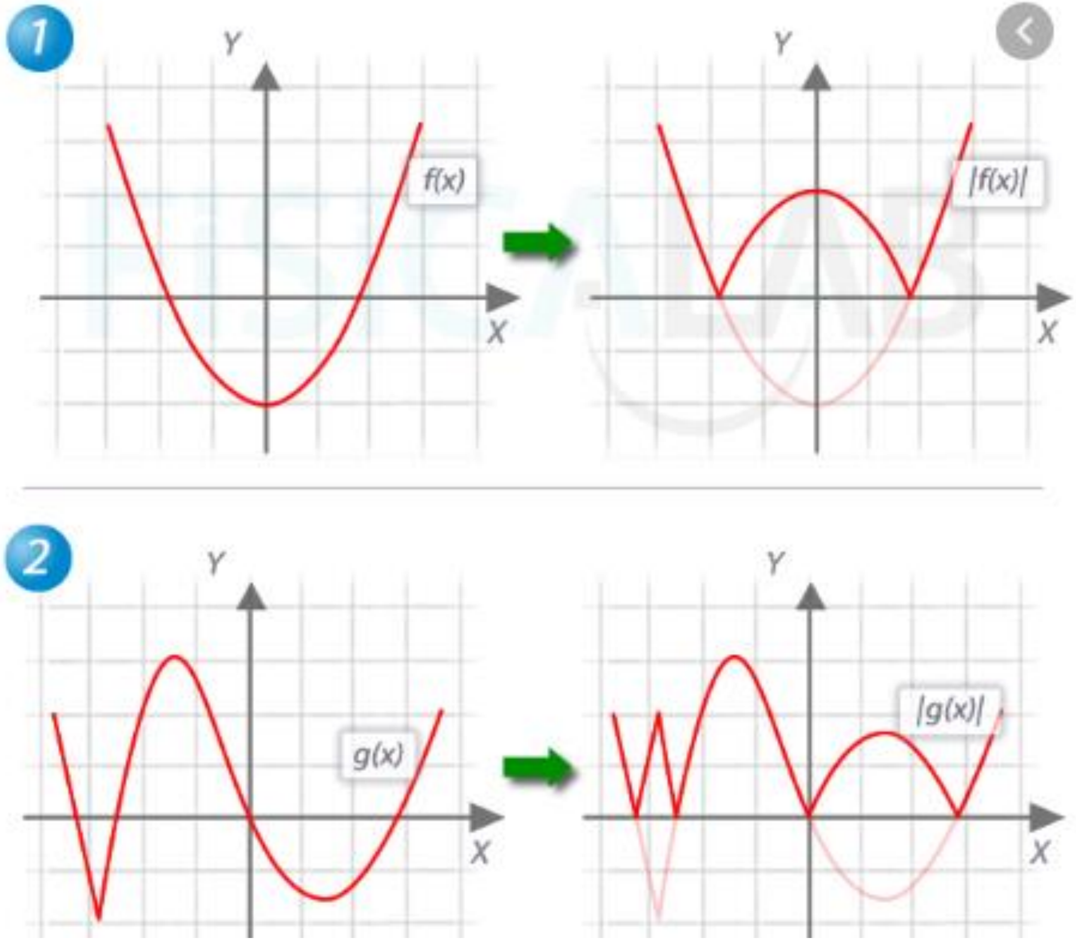
Simetrías

Reflejos

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

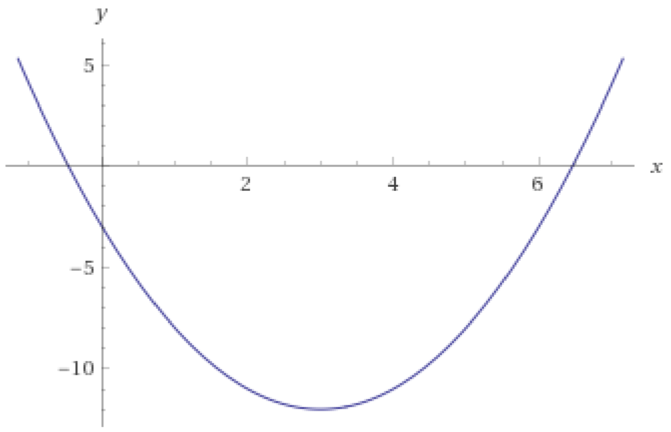
Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.



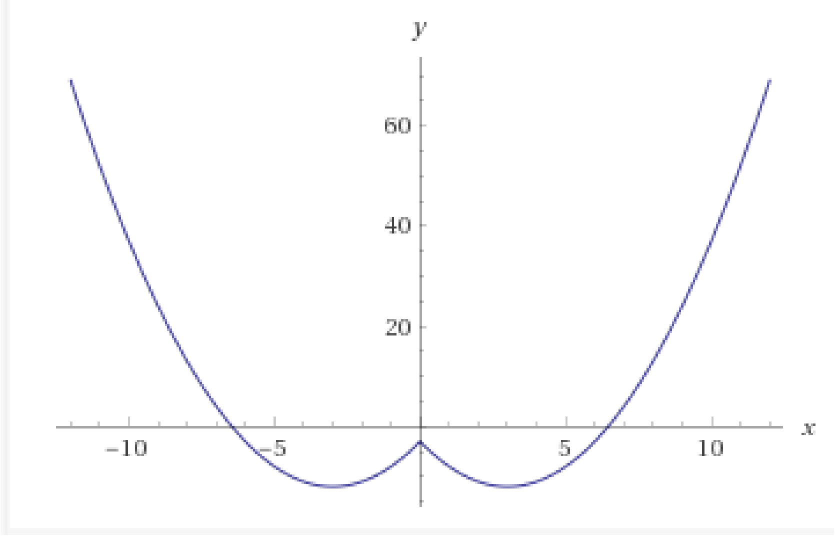


Simetrías

$y = f(x)$

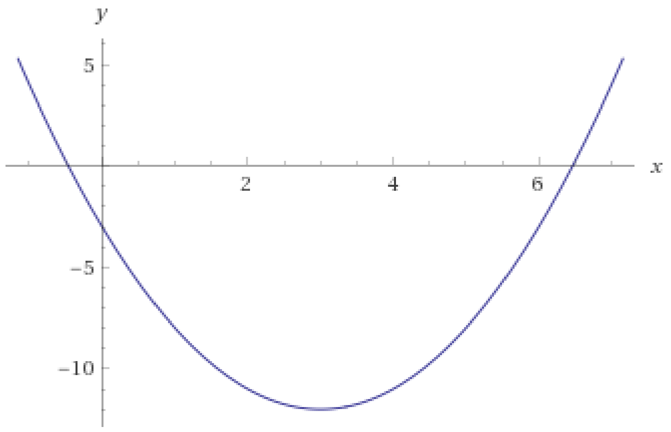


$y = f(|x|)$

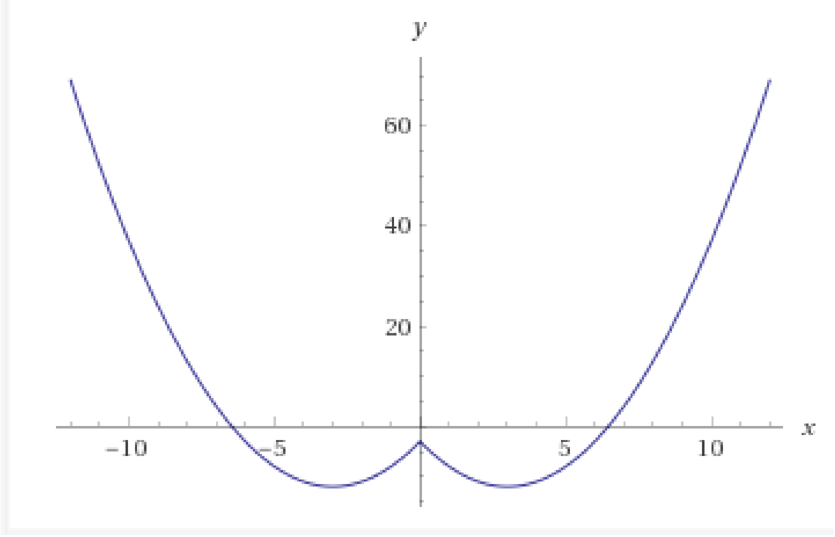


Simetrías

$y = f(x)$



$y = f(|x|)$

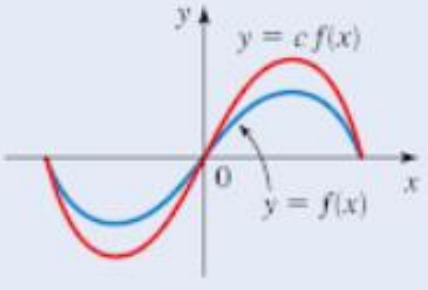


Expansiones y contracciones

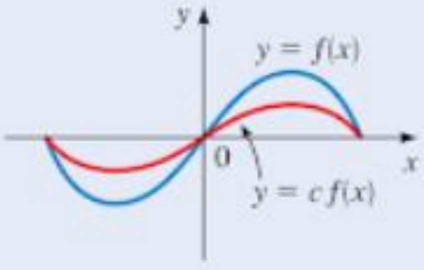
Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

Si $0 < c < 1$, acorte verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.



$c > 1$

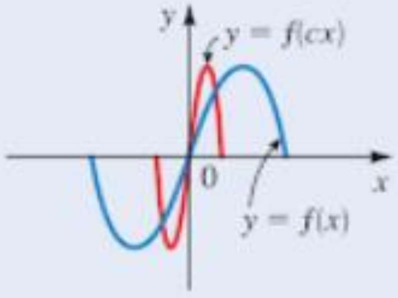


$0 < c < 1$

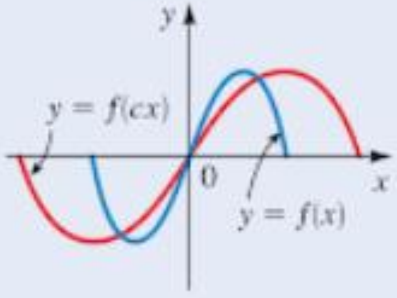
La gráfica de $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, acorte la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.



$c > 1$



$0 < c < 1$

Considerar al efectuar reflejos y simetrías con respecto a qué eje se harán estos

¿Por qué al graficar $f(-x)$ a partir de $f(x)$ se refleja la gráfica en torno al eje Y?

Respuesta: Ya que si un punto en la gráfica original era por ejemplo $(4;3)$ significaba que $f(4)=3$

ahora en la nueva función $f(-x)$ debe ser el punto $(-4;3)$ para que así $f\big(-(-4)\big)$ siga siendo $f(4)=3$

¿Qué pasa si queremos graficar $f(2-x)$ a partir de $f(x-2)$? *¿También se reflejaría en torno al eje Y?*

Respuesta: En este caso ya no se reflejaría con respecto al eje Y

ya que si por ejemplo tenemos el punto $(4;3)$ el cual significa $f(4-2)=3$

ahora el punto que tenga la misma ordenada sería $(0;3)$ el cual signifca $f(2-0)=3$ lo cual es lo mismo

Entonces el punto $(4;3)$ se refleja al $(0;3)$ y no al $(-4;3)$

Es decir, este reflejo se ha hecho con respecto al eje vertical $x=2$ y no al eje Y

$¿Por\ qué\ al\ graficar\ f(|x|)partir\ de\ f(x)\ se\ genera\ una\ simetría\ en\ torno\ al\ eje\ Y?$

$Respuesta: Ya\ que\ si\ un\ punto\ en\ la\ gráfica\ \ original\ era\ por\ ejemplo\ (4;3)\ significaba\ que\ f(4)=3$

$ahora\ en\ la\ nueva\ función\ f(|x|)\ no\ solo\ el\ punto\ (4;3)cumple\ que\ f(4)=3\ sino\ también\ (-4;3)$

$¿Qué\ pasa\ si\ queremos\ graficar\ f(|x-2|)\ a\ partir\ de\ f(x-2)?$

$¿También\ se\ genera\ una\ simetría\ en\ torno\ al\ eje\ Y?$

$Respuesta: En\ este\ caso\ ya\ no\ se\ genera\ una\ simetría\ con\ respecto\ al\ eje\ Y$

$ya\ que\ si\ por\ ejemplo\ tenemos\ el\ punto\ (4;3)\ el\ cual\ significa\ f(4-2)=3$

$ahora\ el\ punto\ que\ tenga\ la\ misma\ ordenada\ sería\ (0;3)el\ cual\ signifca\ f(|0-2|)=3\ lo\ cual\ es\ lo\ mismo$

$Entonces\ el\ punto\ (4;3)se\ refleja\ al\ (0;3)\ y\ no\ al\ (-4;3)$

$\boldsymbol{Es\ decir, la\ simetría\ se\ ha\ hecho\ con\ respecto\ al\ eje\ vertical\ x=2\ y\ no\ al\ eje\ Y}$

PROBLEMA

01. Sea la función F:]-1; 3] →]m; m + n] definida por $F(x) = -x^2 + 4x - 3$ el cual es suryectiva. De acuerdo a esto, calcular el valor de (n - m)

A) 8 B) 17 C) 7
D) 9 E) 16

SOLUCIÓN

$Ya\ que\ F\ es\ suryectiva\ entonces\ ]m : m + n[\ debe\ ser\ el\ Rango\ de\ F$

$Calculamos\ el\ rango:$

$-1 < x \leq 3 \quad -3 < x - 2 \leq 1 \quad 0 \leq (x-2)^2 < 9$

$0 \leq x^2 - 4x + 4 < 9 \quad -1 \leq x^2 - 4x + 3 < 8$

$-8 < -x^2 + 4x - 3 \leq 1 \quad RanF =]-8; 1]$

$De\ donde\ m = -8\ \ y\ \ n = 9$

$\boldsymbol{n - m = 17}$

PROBLEMA

04. Dada la función real creciente:

$$H = \{(x;\ x^2 + 2) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x > 1\}$$

muestre la inversa de H, si existe

A) $H^{-1} = \{(x;\ \sqrt{x+2}) \in \mathbb{R}^2 \ /\ 0 < x < 2\}$
B) $H^{-1} = \{(x;\ \sqrt{x-2}) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x > 0\}$
C) $H^{-1} = \{(x;\ \sqrt{x+2}) \in \mathbb{R}^2 \ /\ 0 < x < 1\}$
D) $H^{-1} = \{(x;\ \sqrt{x-2}) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x > 3\}$
E) No existe la inversa

SOLUCIÓN

Ya que $x > 1$ *podemos verificar que* H *es inyectiva*
y también que el $RanH =]3;+\infty[$

de esta manera al definir a $H\!:\ ]1;+\infty[\ \to]3;+\infty[\quad y = H(x) = x^2 + 2$

tenemos a una función biyectiva y podemos definir a su inversa.

$$H^{-1}\!:\ ]3;+\infty[\ \to\ ]1;+\infty[\qquad y = H^{-1}(x)$$

hallamos la regla de corrrespondencia:

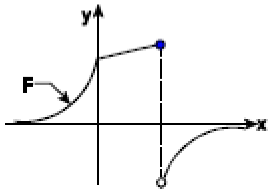
$x = y^2 + 2$ *de donde* $y = \sqrt{x-2}$ *ya que el rango debe ser* $]1;+\infty[$

$$H^{-1}\!:\ ]3;+\infty[\ \to\ ]1;+\infty[\qquad y = H^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$$

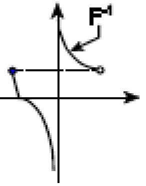
$$H^{-1} = \{(x;\sqrt{x-2}) \in \mathbb{R}^2, \qquad x > 3\}$$

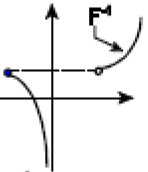
PROBLEMA

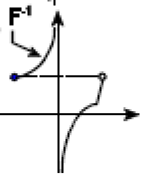
07. Se tiene una función real F, cuya gráfica se muestra a continuación:

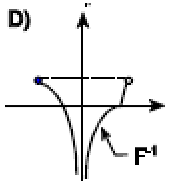


Trazar la gráfica de la inversa de dicha función

A)


B)


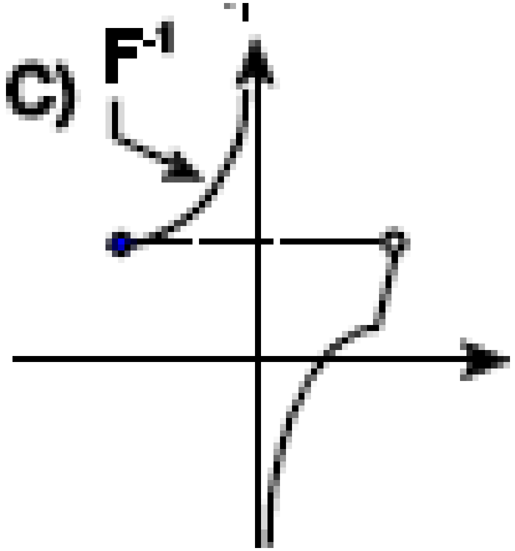
C)


D)


E) Faltan datos

SOLUCIÓN

Buscamos la alternativa que tenga simetría con respecto a la función identidad



PROBLEMA

09. Demuestre que la función irracional :

$F = \{ (x; y) / y = 3+\sqrt{3-2x-x^2}; \quad -1<x\leq 1 \}$

es o no univalente. Luego, determinar su inversa F^{-1}, si es que existe

A) $F^{-1}(x) = -1-\sqrt{x^2-6x+5}$; $2\leq x<6$

B) $F^{-1}(x) = 1-\sqrt{-x^2+6x+5}$; $3\leq x<6$

C) $F^{-1}(x) = -1+\sqrt{-x^2+6x-5}$; $3\leq x<5$

D) $F^{-1}(x) = 1+\sqrt{x^2-6x-5}$; $2\leq x<5$

E) No es univalente en]-1; 1]

SOLUCIÓN

$$F(a) = F(b) \rightarrow 3+\sqrt{3-2a-a^2} = 3+\sqrt{3-2b-b^2}$$

$$\rightarrow -2a-a^2 = -2b-b^2$$

$$\rightarrow 0 = a^2-b^2+2a-2b$$

$$\rightarrow 0 = (a-b)(a+b+2)$$

$$\rightarrow a = b \quad \vee \quad a+b=-2$$

$$ya\ que\ a, b \in]-1;1]\ entonces\ a+b > \ -2 \quad y\ solo\ quedaría\ que\ a=b$$

$$Por\ lo\ tanto\ F\ es\ inyectiva$$

$$y = 3+\sqrt{4-(x+1)^2}$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$0 < x+1 \leq 2$$

$$0 < (x+1)^2 \leq 4$$

$$0 \leq 4-(x+1)^2 < 4$$

$$3 \leq 3+\sqrt{4-(x+1)^2} < 5 \qquad Ranf = [3;5[$$

$$x = 3+\sqrt{4-(y+1)^2}$$

$$x-3 = \sqrt{4-(y+1)^2}$$

$$x^2-6x+9 = 4-(y+1)^2$$

$$(y+1)^2 = -x^2+6x-5$$

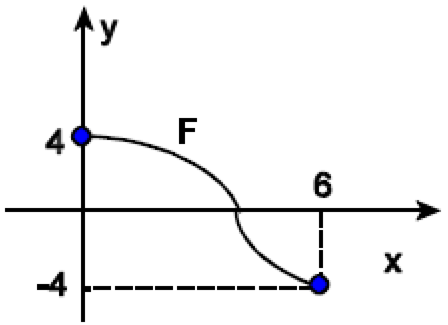
$$y = -1+\sqrt{-x^2+6x-5}$$

CLAVE C

PROBLEMA

SOLUCIÓN

10. La gráfica de la función F: [0; 6] → [-4; 4] está dada por:



Muestre la(s) afirmación(es) correcta(s):

I. F es biyectiva

II. |F| no es biyectiva

III. Si $H(x) = F(x) + 4 \ \forall \ x \in [0; 6]$ entonces $Ran(H) = Ran(|F|)$

A) I y II B) II y III C) I y III

D) Solo I E) Todas

$I.-Verdadero$

$II.-Verdadero\ ya\ que\ no\ es\ inyectiva$

$III.-Falso\ ya\ que\ RanH = [0;8]\ mientras\ que\ Ran(|F|) = [0:4]$

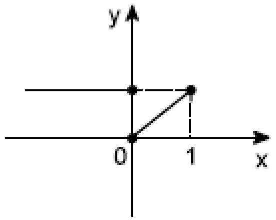
CLAVE D) VVF

PROBLEMA

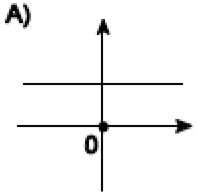
11. Graficar :

$$G(x) = F(1 - |x|)$$

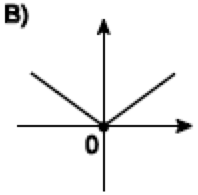
si la gráfica de F es la siguiente :



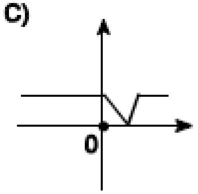
A)



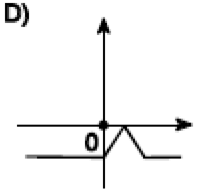
B)



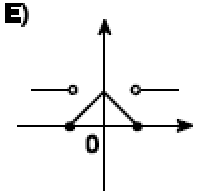
C)



D)

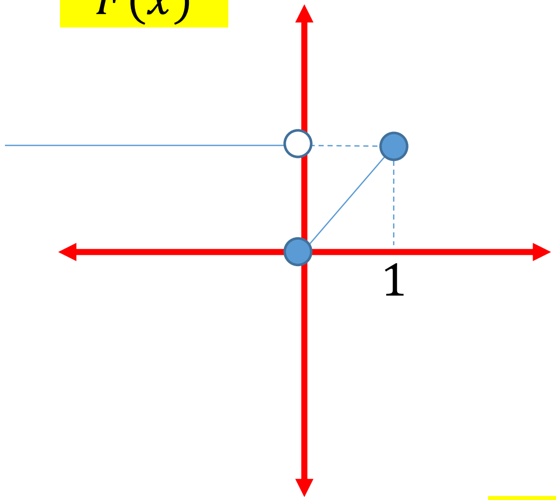


E)

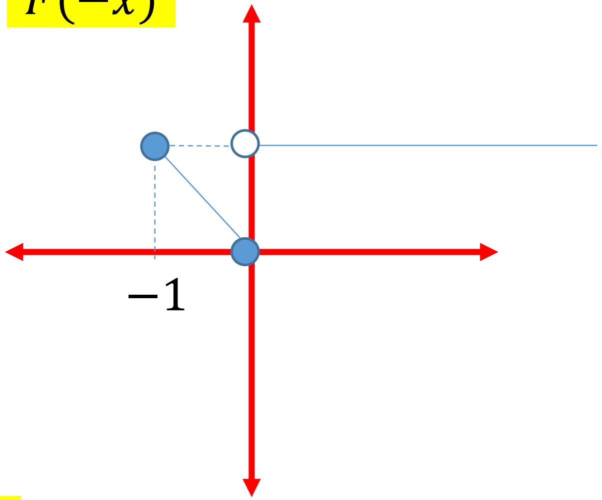


SOLUCIÓN

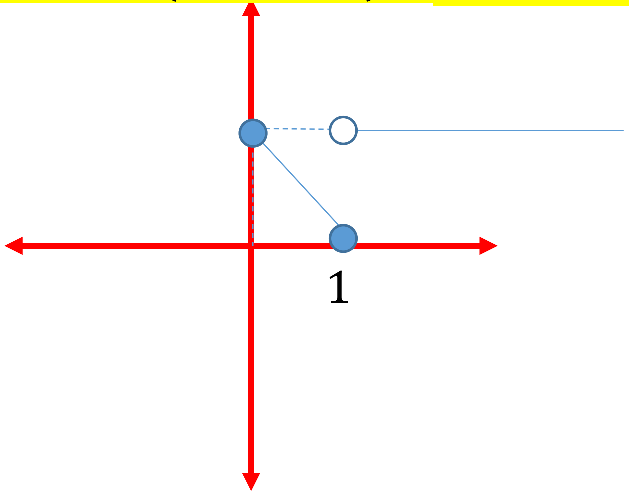
$F(x)$



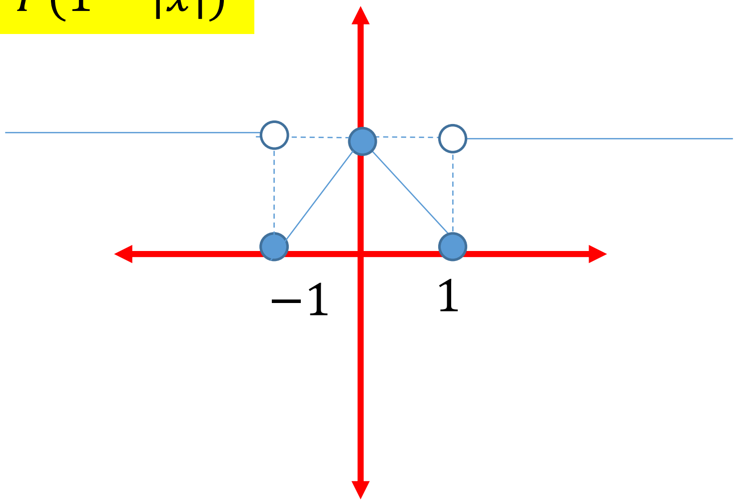
$F(-x)$



$F(-(x-1)) = F(1-x)$



$F(1-|x|)$



PROBLEMA

20. De la función :

$$F(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 0 \\ -\sqrt{1/x}; & x > 0 \end{cases}$$

evaluar: $F^*(4) + F^*(-1/2)$

A) -2 B) 1 C) 0

D) -1 E) 2

SOLUCIÓN

$$Sea\ F^*(4) = a$$

$$entonces\ F(a) = 4 \qquad entonces\ a = -2$$

$$Sea\ F^*\left(-\frac{1}{2}\right) = b$$

$$-2 + 4 = 2$$

$$entonces\ F(b) = -\frac{1}{2} \qquad entonces\ b = 4$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

02. Si la función F: [2; 8[$\rightarrow$ [a; b[definida por $F(x) = x^2 - 4x + 7$ es biyectiva, calcular el valor de (a + b)

A) 30 B) 42 C) 28
D) 36 E) 45

03. Sea la función F: [-2; 1[$\rightarrow \mathbb{R}$ definida por F(x) = 2x + 3. Encontrar la función F^{-1}, si existe.

A) F^{-1} : [-1; 5[$\rightarrow$ [-2; 1[/ $y = \dfrac{x-3}{2}$

B) F^{-1} : [-2; 4[$\rightarrow$ [-2; 1[/ $y = \dfrac{x-2}{3}$

C) F^{-1} : [-1; 5[$\rightarrow$ [0; 2[/ $y = \dfrac{x-3}{2}$

D) F^{-1} : [-2; 4[$\rightarrow$ [0; 2[/ $y = \dfrac{x-2}{3}$

E) Falta mayor información

05. Dada la función real :

$$F(x) = 3 + \sqrt{x-2}; \quad x < 11$$

determinar F^{-1}, si existe, y su respectivo dominio.

A) $F^{-1}(x) = x^2 - 9x + 10;\ 2 < x \leq 6$
B) $F^{-1}(x) = x^2 + 4x - 8;\ 1 < x \leq 5$
C) $F^{-1}(x) = x^2 - 6x + 11;\ 3 \leq x < 6$
D) $F^{-1}(x) = x^2 + 2x - 12;\ 0 \leq x < 4$
E) No admite inversa

08. De los siguientes enunciados :

( ) La función real F: $\mathbb{R}^+ \rightarrow [-1; +\infty[$ definida por $F(x) = x^2 + x$ es una aplicación
( ) La función $G(x) = x^2$ es inyectiva si $x \in\ ]-1; 0] \cup [3; 4]$
( ) La función H : $\mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty[$ definida por $H(x) = x^4 + 1$ es suryectiva
( ) La función P : $\mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-6\}$ definida por $P(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ es biyectiva

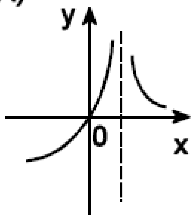
muestre lo correcto (C) o incorrecto (I)

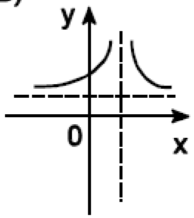
A) CICC B) ICII C) ICIC
D) CCII E) IICI

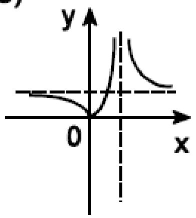
12. Sea F una función cuya regla de correspondencia es:

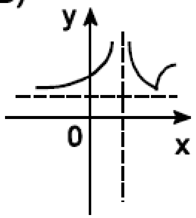
$$F(x) = \left|\frac{x}{x-1}\right|$$

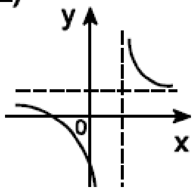
indique la gráfica de dicha función.

A)


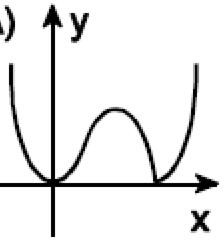
B)


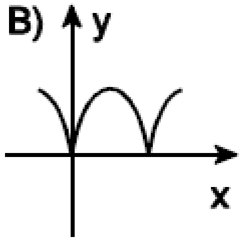
C)


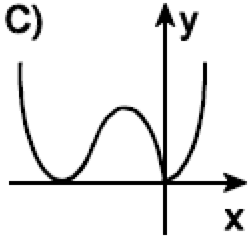
D)


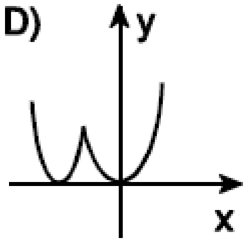
E)


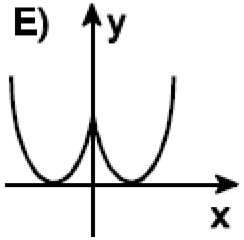
13. Indicar la gráfica de $F(x) = |x^2 - 10x|$

A)


B)


C)


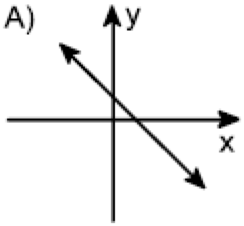
D)


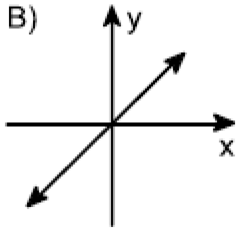
E)


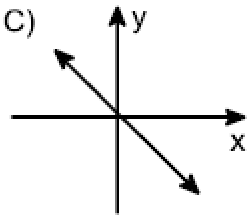
14. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ la función polinomial F se define por:

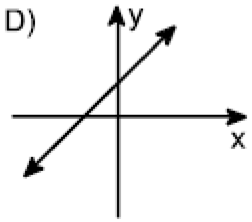
$$F(x) = \frac{2x^3 + ax^2 + bx + 1}{x^2 + 1}$$

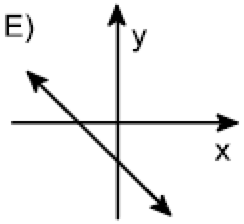
Entonces su gráfica aproximada es:

A)


B)


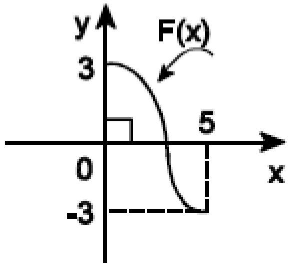
C)


D)


E)


15. Dada la gráfica de:

$F : [0; 5] \rightarrow [-3; 3]$



Afirmamos:

I. F es biyectiva

II. -|F| no es biyectiva

III. Dom F*=]-3; 3[

¿Cuáles son verdaderas?

A) I y II B) Solo II C) Las 3

D) Ninguno E) I y III

16. Dada la función sobreyectiva:

$$F : A \rightarrow B \,/\, F(x) = \frac{x^2 - 16}{(x+4)(x+5)}$$

determinar el número de elementos de (A-B)

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

17. Sean: A=[-3; 4] $\wedge$ B=[0; 2]; se define la función :

$$F : A \rightarrow B /\ y=F(x)\sqrt{|x|}$$

Si F es una aplicación, entonces :

A) F es inyectiva B) F es par

C) F es suryectiva D) F es impar

E) B y C

19. Hallar el conjunto B de manera que:

$$F :]-1; 0[\rightarrow B /\ F(x)= \frac{x+1}{x^2 - 1}$$

sea suryectiva.

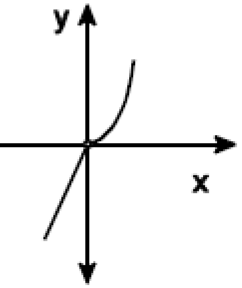
A)]-1; -1/2[B) [-1; -1/2[C) [-1; -1/2]

D) [-1; -1/4[E)]-1; -1/4]

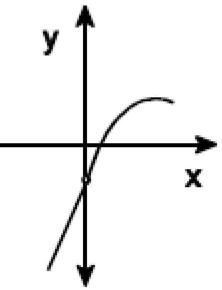
18. Bosquejar la gráfica de F^{-1}, sabiendo que:

$$F(x+1) = \begin{cases} 1+x & x \leq -1, \\ x^2+2x+1 & x > -1 \end{cases}$$

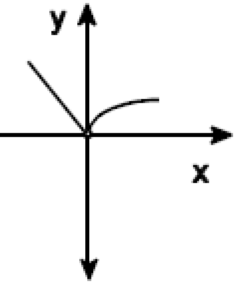
A)



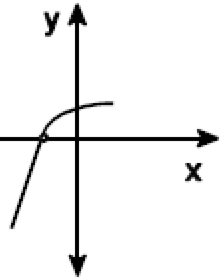
B)



C)



D)



E)